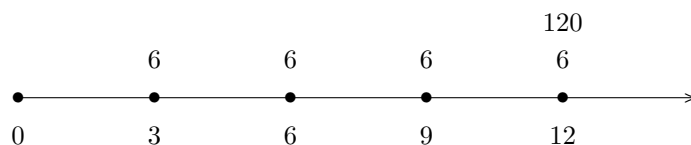


Matematica finanziaria: svolgimento della prova di esame del 4 settembre 2007¹

1. Calcolare il montante che si ottiene dopo 2 anni con un investimento di 120€ in regime nominale al tasso annuale del 10% pagabile due volte all'anno, con reinvestimento delle cedole in regime esponenziale al tasso bimestrale del 2%.

Svolgimento.

Come prima cosa calcoliamo la cedola: il 10% annuale di 120€ è 12€ ogni anno, e pagabile due volte l'anno significa 6€ per semestre. Poiché il tasso di reinvestimento assegnato nel testo è bimestrale, scegliamo di rappresentare il tempo in bimestri: quindi 6 mesi sono 3 bimestri, 1 anno sono 6 bimestri e così via. L'operazione finanziaria su 2 anni è rappresentata allora da



Il montante cercato è la somma dei montanti dati dalle singole cedole (investite in regime esponenziale al tasso bimestrale del 2%), più il capitale iniziale che ci verrà restituito alla fine:

$$\begin{aligned}\text{montante} &= 6(1 + 0.02)^9 + 6(1 + 0.02)^6 + 6(1 + 0.02)^3 + 6 + 120 \\ &= 6(c^3 + c^2 + c + 1) + 120 \quad \text{con } c = 1.02^3 \\ &= 6 \frac{c^4 - 1}{c - 1} + 120 = 6 \frac{1.02^{12} - 1}{1.02^3 - 1} + 120 = 146.295.\end{aligned}$$

Errori più comuni.²

- (a) Niente grafico temporale: non causa perdita di punti, ma consiglio sempre di farlo!
(b) Conversione sbagliata del tasso: per trasformare il tasso dato (bimestrale) al tasso semestrale (le cedole sono semestrali) bisogna usare la formula

$$i_{\text{semestrale}} = (1 + i_{\text{bimestrale}})^3 - 1$$

Infatti un semestre sono tre bimestri. Se in questa formula al posto del 3 si mette 6, si ottiene il tasso annuale (6 bimestri sono un anno!). Questo errore ha causato la perdita di 1 punto.

2. Si descriva il piano di ammortamento italiano di un prestito di 2000€ remunerato al 5% mensile da restituire in 5 mesi.

Svolgimento.

Ammortamento italiano significa quote capitali costanti, e poiché dobbiamo restituire un capitale di 2000€ in 5 mesi ne segue che la quota capitale è $2000/5 = 400$. Per quanto riguarda la quota interesse, alla fine del primo mese avremo usufruito di 2000 per 1 mese, che dovremo remunerare -come specificato nel testo- al tasso mensile del 5%, sicché la quota interesse è 100. La rata da pagare alla fine del primo mese è dunque $400 + 100 = 500$, e il debito residuo di cui usufruiremo sino alla fine del secondo mese è $2000 - 400 = 1600$. Proseguendo linearmente, come sappiamo di poter fare nel caso di ammortamento italiano, otteniamo 80, 60, 40, 20 per le restanti quote interesse, e conseguentemente 480, 460, 440, 420 per le restanti rate e 1200, 800, 400, 0 per i debiti residui.

Mese	QC	QI	R	DR
1	400	100	500	1600
2	400	80	480	1200
3	400	60	460	800
4	400	40	440	400
5	400	20	420	0

Tabella 1: Piano di ammortamento sintetizzato sotto forma di tabella.

Errori più comuni.

La rata è la somma di quota capitale e quota interesse, non la differenza! Ovviamente questo errore rende nullo l'esercizio!

¹Gli esercizi da 1 a 7 sono simili ad alcuni degli esercizi degli esoneri del 28 marzo e del 15 maggio 2007: confrontare questo svolgimento con lo svolgimento degli esoneri. Gli esercizi 8 e 9 hanno lo stesso testo degli esercizi corrispondenti negli esoneri (senza Bobo e Bubi), ma domande diverse (più facili). Anche in questo caso, confrontare questo svolgimento con quello degli esoneri è molto istruttivo!

²Questi sono una sintesi delle imprecisioni e degli errori riscontrati nei compiti, consiglio vivamente di provare a fare gli esercizi da soli e poi confrontare con questa sezione!

3. Calcolare la forza d'interesse di $r(x, y) = e^{y^2 - x^2}$. Dire, motivando la risposta, se $r(x, y)$ è scindibile.

Svolgimento.

La forza d'interesse $\delta(x, y)$ è la derivata parziale rispetto a y del logaritmo di $r(x, y)$: in questo caso è evidentemente $\ln(r(x, y)) = y^2 - x^2$, e quindi $\delta(x, y) = 2y$. Infine, poiché $\delta(x, y)$ non dipende da x , per il teorema di Cantelli la legge $r(x, y)$ è scindibile.

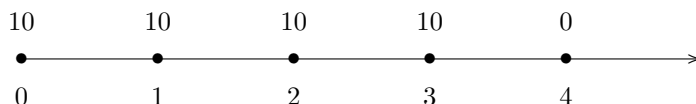
Errori più comuni.

“La legge $r(x, y)$ non è scindibile in quanto la forza d'interesse $r(x, y) = e^{y^2 - x^2}$ dipende da due variabili”. 0 punti, in quanto si confonde legge finanziaria con forza d'interesse!

4. Calcolare il valore attuale di una rendita mensile anticipata di durata 4 mesi e rata $R = 10$ usando un tasso di valutazione $i = 10\%$.

Svolgimento.

Descriviamo la rendita con il solito asse dei tempi:



Notare che, essendo la rendita anticipata, al tempo 4 non c'è la rata!

Posto $\nu = 1/1.1$, il valore attuale è

$$10 + 10\nu + 10\nu^2 + 10\nu^3 = 10(1 + \nu + \nu^2 + \nu^3) \cong 34.87$$

Errori più comuni.

Viene usata (come già in altri scritti) la formula “rata = a figurato n al tasso i ”. Questa formula, oltre ad essere priva di senso, *NON ESISTE!!!* 0 punti.

5. Calcolare la probabilità di ottenere 7 lanciando due dadi non truccati a 6 facce. Qual è la probabilità di ottenere 13?

Svolgimento.

Lo spazio degli eventi è dato da tutti i risultati possibili del lancio dei due dadi, ovvero è costituito da 36 elementi (tutte le coppie (risultato primo lancio, risultato secondo lancio)). Per la prima domanda (probabilità di ottenere 7) gli eventi che a noi interessano (i cosiddetti “casi favorevoli”) sono $(1, 6)$, $(2, 5)$, $(3, 4)$, $(4, 3)$, $(5, 2)$, $(6, 1)$ e sono in numero di 6. Dalla definizione classica di probabilità come casi favorevoli diviso casi possibili otteniamo

$$\text{Prob}(\text{“ottenere 7”}) = 6/36 = 1/6.$$

La seconda domanda (probabilità di ottenere 13) è ovvia: il numero 13 non può ottenersi come somma di 2 numeri entrambi compresi tra 1 e 6, e dunque l'evento richiesto ha probabilità 0.

Errori più comuni.

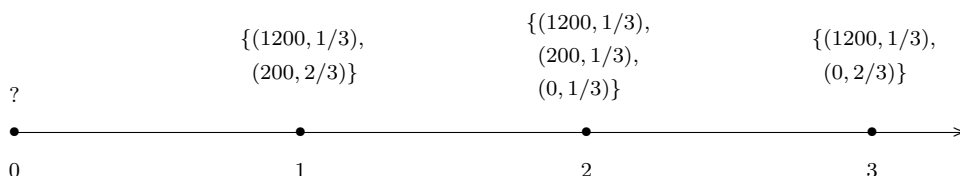
- (a) $\frac{6}{36} \cdot 2$. Da dove viene questa moltiplicazione per due?
 (b) $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}$, accompagnato dalla frase “ottenere 1 con il primo dado e 6 con il secondo sono eventi indipendenti”.
 Giustissimo, ma la somma 7 si ottiene anche come $2 + 5$, $3 + 4$, $4 + 3$, $5 + 2$ e $6 + 1$!

6. Calcolare il rendimento mensile effettivo medio di un'obbligazione di valore nominale 1000€, remunerata con cedole mensili del 20% e vita residua 3 mesi, assumendo un rimborso di tipo progressivo uniforme e un prezzo di 1300€. Approssimare il risultato a 2 cifre decimali.

Svolgimento.

La prima cosa da chiedersi per riuscire a fare questo esercizio è: “che cos'è il rendimento effettivo medio?”. A buon senso, ci sono due possibilità -il rendimento effettivo dell'obbligazione media o la media dei rendimenti effettivi³. Se si è studiata la teoria, si sa che la risposta corretta è la prima: calcoliamo dunque il flusso di cassa medio dell'obbligazione, dopodiché calcoleremo il tasso interno di rendimento di tale obbligazione media assumendo come prezzo di vendita 1300.

Essendo la cedola 200 (20% di 1000), l'obbligazione è descritta da



³Ovviamente bisogna anche sapere che con “rendimento effettivo” si intende “tasso interno di rendimento”.

L'unità di misura temporale scelta è il mese, visto che si chiede il rendimento mensile. Il punto interrogativo al tempo 0 simboleggia un'ambiguità del testo: infatti, visto che l'obbligazione scade tra 3 mesi, e le cedole sono mensili, ci troviamo proprio alla scadenza di una di queste cedole, e lo studente accorto dovrebbe d'istinto porsi la domanda: "codesta cedola è già stata riscossa o è ancora da riscuotere?". Più criptico: "ci troviamo in 0^+ o in 0^- ". Non essendo precisato nel testo, entrambe le soluzioni sono valide. Risolviamo il caso 0^+ (e osserviamo che nel caso 0^- le probabilità cambierebbero, perché in tal caso le scadenze sarebbero 4, non 3!).

L'obbligazione media è



e dunque l'operazione finanziaria della quale dobbiamo trovare il TIR è



L'equazione da risolvere, opportunamente semplificata e ordinata (abbiamo moltiplicato per 3, diviso per 100, e ordinato per potenze di ν decrescenti), è allora:

$$12\nu^3 + 14\nu^2 + 16\nu - 39 = 0.$$

I coefficienti sono tali che sia Cartesio, sia Nörstrom funzionano: la nostra equazione ha una sola soluzione tra 0 e 1, e dunque il TIR esiste! Rimane solo da calcolarlo, e lo facciamo con il caro vecchio metodo della bisezione!

Detta $f(\nu) = 12\nu^3 + 14\nu^2 + 16\nu - 39$, abbiamo $f(0) < 0$ e $f(1) > 0$. Poi, per tentativi (che vanno scritti sullo svolgimento!), troviamo $f(0.96) < 0$ e $f(0.97) > 0$, da cui deduciamo che ν si trova nell'intervallo $(0.96, 0.97)$. Quale scegliamo? Calcoliamo ancora $f(0.965) > 0$, da cui deduciamo che ν si trova in $(0.96, 0.965)$, e quindi approssimiamo per difetto $\nu \cong 0.96$. Da tutto questo otteniamo

$$i = \frac{1}{\nu} - 1 \cong \frac{1}{0.96} - 1 \cong 0.04.$$

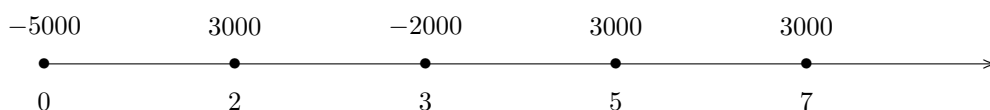
Errori più comuni.

Risultato giusto scritto senza giustificazioni. Visto che è giusto, o avete una fortuna sfacciata, o avete copiato, o avete fatto i conti su un foglio che non mi avete consegnato. Per cui, consiglio vivamente di consegnare sempre tutti i fogli!

7. Si consideri l'operazione finanziaria $(-5000, 3000, -2000, 3000, 3000)$ ai tempi $(0, 2, 3, 5, 7)$. Calcolare il montante usando un tasso del 10% periodale.

Svolgimento.

L'operazione finanziaria è



e il montante (cioè il valore dell'operazione finanziaria al tempo 7) al tasso del 10% è

$$-5000 \cdot 1.1^7 + 3000 \cdot 1.1^5 - 2000 \cdot 1.1^4 + 3000 \cdot 1.1^2 + 3000 = -1210.26.$$

Anche se non richiesto dal testo, osserviamo che il fatto che il montante venga negativo esprime la non convenienza di questa operazione finanziaria, quando confrontata con la possibilità di investimento al tasso del 10% costante sui 7 anni.

Errori più comuni.

Montante e valore attuale sono due cose diverse! È vero che alla base c'è la stessa nozione di valore di un'operazione finanziaria, ma calcolare il valore attuale quando viene chiesto il montante indica una superficiale lettura del testo. 0 punti.

8. Solo corso da 6 crediti Si consideri una call europea con prezzo d'esercizio 95 e scadenza tra 1 periodo. Si assuma che il prezzo del sottostante, che al tempo 0 è 100, possa solo salire del 10% con probabilità 0.9, o scendere del 10% con probabilità 0.1, e che il tasso privo di rischio sia del 5% periodale.

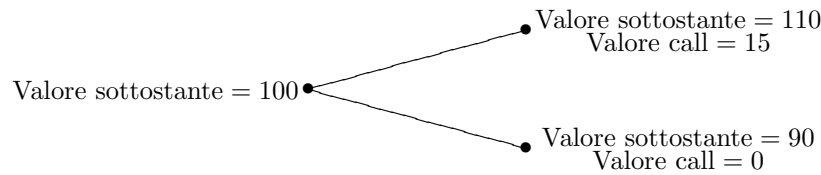


Figura 1: Valori call/sottostante su un albero ad uno stadio.

- (a) Calcolare il valore della call.
- (b) Descrivere un portafoglio replicante.

Svolgimento.

Le domande (a) e (b) sono collegate tra loro: il valore della call è univocamente determinato dall'esigenza di avere un mercato coerente (cioè privo di possibilità di arbitraggio). Nel caso questo non accada è possibile comprare e vendere lo stesso prodotto sotto forme diverse -la call e il portafoglio replicante-, ovviamente comprando quello che costa meno e vendendo quello che costa di più. Ne consegue che il valore della call deve necessariamente essere quello del portafoglio replicante se vogliamo che il mercato sia in equilibrio!

Dalla teoria conosciamo anche un altro metodo per il calcolo del valore di una call europea con sottostante che non fornisce dividendi: valor medio neutrale al rischio attualizzato. A scopo didattico, usiamo entrambi i metodi.

Metodo 1: mondo neutrale al rischio. Sappiamo che il criterio del valor medio non si può usare nella valutazione dei titoli derivati, perché fornisce un prezzo sbagliato (dove sbagliato significa che genera possibilità di arbitraggio). C'è però un'eccezione: se usiamo delle probabilità particolari, dette *neutrali al rischio*, questo metodo funziona! Detti u e d i fattori moltiplicativi di evoluzione del prezzo del sottostante, ed r il fattore di rendimento privo di rischio, le probabilità neutrali al rischio π e ρ sono date da

$$\pi = \frac{r - d}{u - d} \quad \rho = \frac{u - r}{u - d}$$

Particolarizzando al nostro esercizio, otteniamo $u = 1.1$ (aumentare un prezzo del 10% vuol dire moltiplicare quel prezzo per 1.1), $d = 0.9$ (diminuire un prezzo del 10% vuol dire moltiplicare quel prezzo per 0.9), e $r = 1 + 0.05 = 1.05$. Controlliamo che le unità di misura dei tempi siano tutte coerenti tra loro -lo sono: il tasso privo di rischio è periodale, e l'evoluzione binomiale del sottostante è data su un periodo- e andiamo avanti. Otteniamo le probabilità neutrali al rischio

$$\pi = \frac{r - d}{u - d} = \frac{3}{4} \quad \rho = \frac{u - r}{u - d} = \frac{1}{4}$$

che dobbiamo usare per calcolare il valor medio del payoff della call. Quant'è il payoff della call? Se il prezzo del sottostante sale del 10%, diventerà 110, e il possessore della call potrà avere ciò che vale 110 al prezzo di 95, guadagnandoci 15. Se il prezzo del sottostante scende del 10%, diventerà 90, e il possessore della call non comprerà a 95 ciò che potrebbe avere a 90: pertanto il valore della call sarà 0! Tutto questo si sintetizza in genere nel grafico "ad albero" in figura 1.

Il criterio del valor medio *valido solo se usiamo le probabilità neutrali al rischio* dice che possiamo calcolare il valore dell'opzione semplicemente come valor medio dei suoi payoff (15 con probabilità $\frac{3}{4}$ e 0 con probabilità $\frac{1}{4}$), dunque:

$$\text{valor medio call tra 1 periodo} = 15 \frac{3}{4} + 0 \frac{1}{4} = \frac{45}{4}$$

Poiché noi vogliamo il valore della call ora, e non tra un periodo, dobbiamo attualizzare al tasso privo di rischio:

$$\text{valore call al tempo 0} = \frac{45}{4} \frac{1}{1.05} = \frac{45}{4} \frac{20}{21} = \frac{45 \cdot 5}{21} = \frac{75}{7}$$

Il metodo 2 per calcolare il valore della call è la costruzione di un portafoglio replicante, cioè di un portafoglio di azioni e contante che al tempo finale sia equivalente alla call. Diciamo Δ il numero di azioni contenute in questo portafoglio, e L il contante. Il portafoglio al tempo 0 vale $100\Delta + L$, mentre il suo valore al tempo 1 dipende da cosa succede al sottostante: se l'azione sarà salita, il portafoglio varrà $110\Delta + 1.05L$, mentre nel caso in cui l'azione sarà scesa, il portafoglio varrà $90\Delta + 1.05L$. Analogamente, la call varrà 15 o 0. Questo si sintetizza ancora con un grafico ad albero (figura 2).

Richiedere che il portafoglio replichi la call a scadenza significa richiedere che il valore del portafoglio a scadenza sia 15 o 0 se l'azione è salita o scesa, e questo significa richiedere che il seguente sistema sia soddisfatto:

$$\begin{cases} 110\Delta + 1.05L = 15 \\ 90\Delta + 1.05L = 0 \end{cases}$$

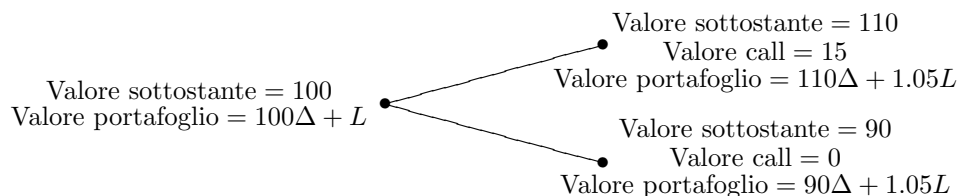


Figura 2: Valori call/sottostante su un albero ad uno stadio.

Il determinante del sistema è $1.05(110 - 90) \neq 0$, quindi abbiamo un'unica soluzione (Δ, L) , corrispondente ad un'unica composizione di portafoglio. Risolviamo il sistema con il metodo che più ci aggrada (qui uso Cramer):

$$\begin{cases} \Delta = \frac{\begin{vmatrix} 15 & 1.05 \\ 0 & 1.05 \end{vmatrix}}{20 \cdot 1.05} = \frac{3}{4} \\ L = \frac{\begin{vmatrix} 110 & 15 \\ 90 & 0 \end{vmatrix}}{20 \cdot 1.05} = -\frac{90 \cdot 15}{20 \cdot 1.05} = -\frac{450}{7} \end{cases}$$

da cui il valore in 0 del portafoglio (che deve essere il valore in 0 della call, visto che a scadenza sono equivalenti!):

$$\text{valore portafoglio in } 0 = 100 \cdot \frac{3}{4} - \frac{450}{7} = 75 - \frac{450}{7} = \frac{525 - 450}{7} = \frac{75}{7}$$

che è proprio il valore della call trovato con le probabilità neutrali al rischio!

Ricapitoliamo cosa abbiamo fatto. Abbiamo trovato il valore della call in 0 con due metodi, e abbiamo quindi risposto alla domanda (a) in due modi differenti. Incidentalmente il secondo metodo ha comportato la costruzione di un portafoglio replicante, il che ci permette di rispondere più o meno nel seguente modo alla domanda (b): un portafoglio di azioni e contante deve contenere al tempo 0 esattamente $3/4$ di azione e $-450/7$ di contante per essere in grado di replicare la call al tempo 1, dove la negatività di L significa che il portafoglio conterrà il contante *sotto forma di debito*, che andrà infatti restituito alla fine dell'operazione.

Errori più comuni.

- Calcolare le probabilità neutrali al rischio ρ e π , e poi scrivere $15 \cdot \frac{3}{4} + 0 \cdot \frac{1}{4} = \frac{45}{4}$ non basta! Bisogna anche mettere delle parole, qualcosa tipo "questo è il valore della call al tempo 1". Soprattutto in questo tipo di esercizio dovete scrivere qualcosa di diverso dai numeri, altrimenti non posso valutare se sapete cosa state facendo oppure state solo scrivendo un po' di conti che avete imparato a fare senza sapere cosa significano!
- La domanda (b) richiede una frase del tipo "il portafoglio deve contenere tot azioni e tot soldi" come risposta, non basta risolvere il sistema e trovare Δ e L , per lo stesso motivo del punto precedente!
- Non fate entrambi gli esercizi 8 e 9! Fate solo quello che vi spetta, e usate il tempo che avete per farlo nel modo migliore possibile.

9. Solo corso da 7 crediti Si consideri una call europea con prezzo d'esercizio 110 e scadenza tra 3 periodi. Si assuma che ad ogni periodo il prezzo dell'azione sottostante, che al tempo 0 è 100, possa solo salire del 10% con probabilità 0.9, o scendere del 10% con probabilità 0.1, e che il tasso privo di rischio sia del 5% periodale.

- Calcolare il valore della call con la formula di Cox-Ross-Rubinstein.
- Assumendo che al periodo 2 il valore del sottostante sia 121, calcolare quante azioni e quanti soldi deve contenere un portafoglio per replicare il payoff della call a scadenza.

Svolgimento. Questo esercizio è una versione più elaborata del precedente: si usano le stesse tecniche sui singoli periodi, che in questo caso sono 3. Per capire questo svolgimento, è necessario prima aver capito lo svolgimento dell'esercizio precedente!

Come prima cosa, disegniamo il grafo (vedi figura 3) contenente sottostante e call, e denotiamo per maggiore chiarezza il valore del sottostante e della call rispettivamente con $A(\cdot)$ e $C(\cdot)$.

La domanda (a) chiede di trovare $C(0)$ con la formula di Cox-Ross-Rubinstein (cioè il metodo 1 dell'esercizio

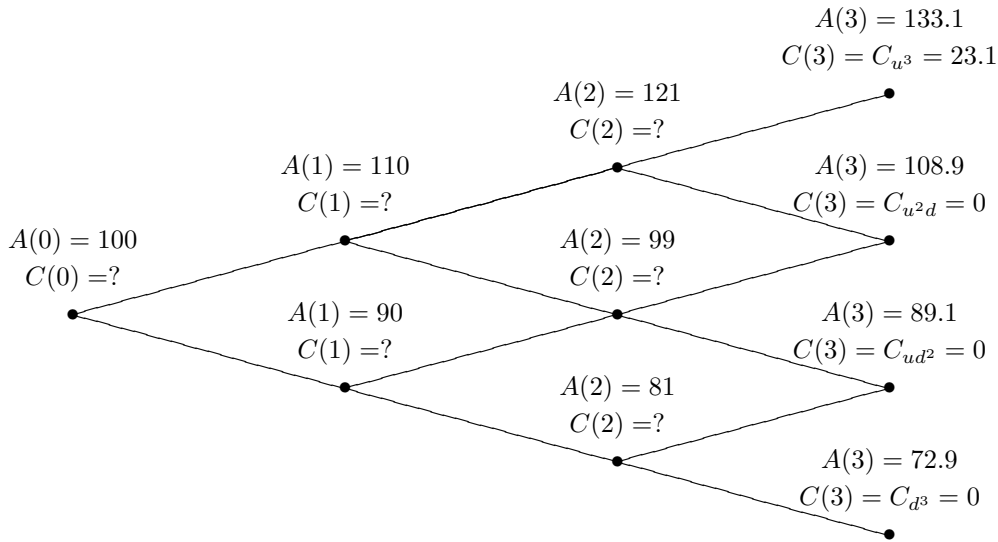


Figura 3: Valori call/sottostante su 3 periodi.

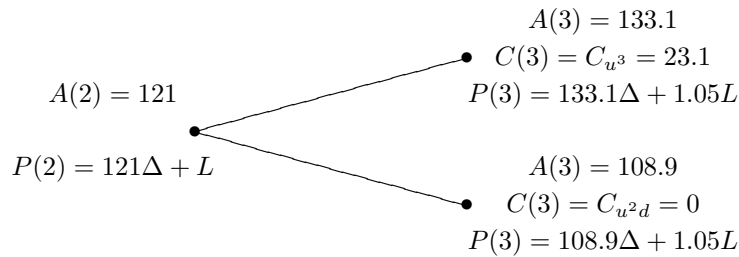


Figura 4: Sottografo 1 della figura 3, con aggiunti i valori del portafoglio replicante.

precedente):

$$\begin{aligned}
 C(0) &= \frac{1}{r^n} \sum_{j=0}^n C_{u^{n-j}d^j} \binom{n}{j} \pi^{n-j} \rho^j \\
 &= \frac{1}{1.05^3} (C_{u^3} \binom{3}{0} \pi^3 + C_{u^2d} \binom{3}{1} \pi^2 \rho + C_{ud^2} \binom{3}{2} \pi \rho^2 + C_{d^3} \binom{3}{3} \rho^3) \\
 &= \frac{1}{1.05^3} \cdot 23.1 \cdot \frac{3^3}{4^3} \cong 8.42
 \end{aligned}$$

Notare che anche in questo caso si potrebbe trovare il valore $C(0)$ con il metodo del portafoglio replicante, ma questo richiederebbe la risoluzione di vari sistemi lineari (quanti?), in quanto il metodo del portafoglio replicante è ricorsivo! Il fatto che venga richiesto: “usare la formula di Cox-Ross-Rubinstein” semplifica quindi grandemente l’esercizio!

La domanda (b) richiede il calcolo della coppia (Δ, L) nel caso in cui al periodo 2 il valore del sottostante sia 121! Questo significa che non bisogna risolvere tutti i sistemi, ma *soltanto* quello associato al sottografo dato in figura 4:

Per trovare (Δ, L) dobbiamo quindi risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} 133.1\Delta + 1.05L = 23.1 \\ 108.9\Delta + 1.05L = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \Delta \cong 0.954545 \\ L \cong -99 \end{cases}$$

e pertanto la risposta alla domanda (b) sarà: al tempo 2, assumendo che il valore del sottostante sia arrivato a 121, un portafoglio che voglia replicare il valore dell’opzione al tempo 3 dovrà contenere circa 0.954545 azioni e un debito di 99.

Errori più comuni.

La domanda (b) richiede di risolvere solo il sistema nel caso l’azione sia salita nei primi due periodi, per poi scrivere qualcosa tipo “al tempo 2, assumendo che il valore del sottostante sia arrivato a 121, un portafoglio che voglia replicare il valore dell’opzione al tempo 3 dovrà contenere circa 0.954545 azioni e un debito di 99”. Risolvere tutti i sistemi *senza* dire poi qual è la risposta alla domanda non serve.